MA2 – „písemná" přednáška 20.4.2020

Úvod do integrálního počtu funkcí více proměnných, dvojný integrál.

Minulou „přednášku" jsme dokončili poslední z těch partií diferenciálního počtu funkcí více proměnných, které máme v Matematice A2 probrat, a stejně jako v Matematice A1, přejdeme nyní k „počtu integrálnímu" – seznámíme se s několika dalšími „druhy" integrálů (užitečnými v aplikacích):

1) Riemannův integrál (tj. „určitý") funkcí dvou, resp. tří proměnných (obecně lze definovat integrál i funkcí n-proměnných, ale „nám" stačí $n = 2, 3$ – pokusíme se opět dojít k Riemannovu integrálu fcí dvou a tří proměnných analogickou cestou k té cestě k $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ (v MA1).
A opět, jako vždy, „vybudujeme" definici, a pak vyšetříme existenci, vlastnosti, způsoby výpočtu a aplikace těchto integrálů (integrační obory zde budou množiny v R^2, resp. R^3).

2) Další integrál, který se pokusíme „zvládnout", bude tzv. integrál křivkový, kde obor integrace bude křivka v R^2 (tj. v rovině) nebo v R^3 (v prostoru), konečné délky (co je „křivka" jsme již trochu naznačili v souvislosti s vektorovými funkcemi $\vec{g}: M \subset R \to R^2 (R^3)$, nyní upřesníme).
A „integrovat po křivkách" budeme jednak funkce skalární, tj. $f: M \subset R^2(R^3) \to R$, ale hlavně (což bude důležité pro aplikace) se seznámíme s křivkovými integrály vektorových polí.

O vektorových polích jsme se též již zmínili v diferenciálním počtu – jsou to funkce $\vec{f}: G \subset R^2 \to R^2$ (rovinná pole) a $\vec{f}: G \subset R^3 \to R^3$ (ve fyzice a chemii „častá").

Integrály křivkové z vektorových polí $\vec{f}$ „počítají" práci těchto „silových" polí – velmi důležité pro charakterizaci vektorových polí – speciálně polí t.zv. potenciálních (konzervativních nebo také nevírových).

3) Poslední integrál pak bude t.zv. <u>nevlastní Riemannův integrál</u> – „integrál (v R) přes neomezené intervaly, nebo i integrál neomezených funkcí – což v „klasickém" Riemannově integrálu $(R)\int_a^b f(x)dx$ nejde!

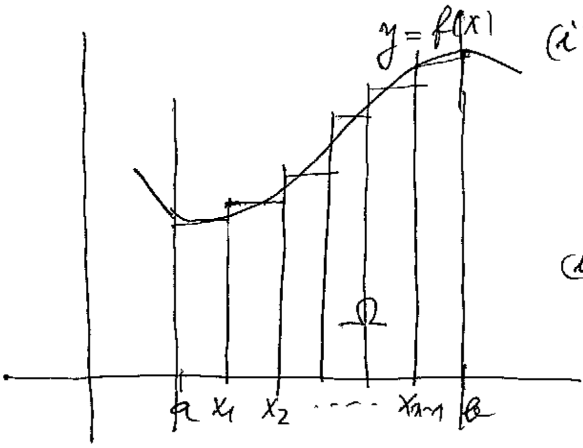
A nyní:

<u>Dvojný (Riemannův) integrál</u>

Dvojný (a později i trojný) integrál v Riemannově smyslu se „vybudují" zcela analogicky k tomu, jak byl „vytvořen" i $(R)\int_a^b f(x)dx$ z funkce jedné proměnné, tak bude nutná „dobře" si $(R)\int_a^b f(x)dx$ nejprve trochu souhrnně zopakovat – k čemu a jak byl $(R)\int_a^b f(x)dx$ definován, a základní vlastnosti a pravidla „zacházení" s $(R)\int_a^b f(x)dx$.

$(R)\int_a^b f(x)dx$: (kdo opakování nepotřebuje, nechť přeskočí)

1. Definice: k definici nás dovedla "úloha najít obsah rovinné" oblasti $\Omega = \{[x,y];\ a \leq x \leq b;\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ (f je fce, def. v $\langle a,b\rangle$ a $f(x) \geq 0$ v $\langle a,b\rangle$, $a<b$, $a,b \in R$):



(i) nápad "– nahradit výpočet plochy "oblasti Ω tím, co umíme" – výpočtem obsahu obdélníka"

(ii) provedení "– máme-li najít obdélník "takový", aby měl základnu $\langle a,b\rangle$ a plochu stejnou jako Ω – to nebude snadné – snadnější, když $\langle a,b\rangle$ "rozdělíme" – vytvoříme dělení intervalu $\langle a,b\rangle$:

$D:\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, zvolíme v obdélníku o základně $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ výšku $f(\xi_i)$, $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a plochu oblasti Ω pak "nahradíme", nebo lépe přiblížíme (aproximujeme) součtem (tzv. Riemannovým) ploch obdélníků o základnách $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ $(i=1,2 \dots n)$

$$\sigma(f,D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

A protože už umíme „myslet i v limitách", tak budeme chápat obsah "naší" oblasti Ω jako limitu Riemannových integrálních součtů při zjemňování všech délek dělení intervalů – – tato limita asi "bude existovat", když bude funkce tak „hezká" jako na obrázku – tj. spojitá v $\langle a,b\rangle$.

někdy byly problémy i s limitami funkcí, tak takovéto limity bude asi pro obecné funkce na $\langle a,b\rangle$ ještě vyjasnit obtížnější, ale matematici vyřešili a my jsme převzali výsledky –
– shrneme, alespoň pak už „jednodušeji" neboli vše zobecnit pro $n=2$:

Definice $(R)\int_a^b f(x)dx$:

je dán interval $\langle a,b\rangle$ $(a,b\in R)$ a dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$

$D: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, norma dělení je $\nu(D)=\max\limits_{i=1,2..n}(x_i-x_{i-1})$;

a $\xi_i\in\langle x_{i-1},x_i\rangle$; označme $\sigma(f,D)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$.

Existuje-li vlastní $\lim\limits_{\nu(D)\to 0}\sigma(f,D)=\lim\limits_{\nu(D)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\ \underline{\in R}$!

nezávisle na volbě $\xi_1,\dots,\xi_n$, pak tuto limitu nazýváme Riemannův integrál funkce f v $\langle a,b\rangle$ a značíme $(R)\int_a^b f(x)dx$.

Tj.
$$\lim_{\nu(D)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = (R)\int_a^b f(x)dx\ (\in R) \quad (*)$$

(připomínám „symboliku" : $f(\xi_i)\longrightarrow f(x)$
$\Delta_i x=(x_i-x_{i-1})\longrightarrow dx$)

a konečné „části plochy" limitně přejdou v
tj. obdélníky „$f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$" $\longrightarrow$ „$f(x)dx$" –

$(R)\int_a^b f(x)dx$ „jako" sčítání „nekonečně" mnoho obdélníčků s výškou $f(x)$ a základnou „dx" („nekonečně malou") a dobrovolné – definice limity v (*) $I = (R)\int_a^b f(x)dx$

D zde bude značit n-tici bodů x_i a i n-tici zvolených $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$,
(tj. $D: a = x_1 < x_2 \dots < x_n = b$, $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2 \dots n$))

a pak: $\lim_{r(D)\to 0} \sigma(f,D) = I \equiv \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall D : r(D) < \delta \Rightarrow |\sigma(f,D) - I| < \varepsilon$

(tj. „⇒ platí" nezávisle na volbě $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$)

Množinu funkcí, def. na $\langle a,b \rangle$, které mají „$(R)\int_a^b f(x)dx$", jsme značili $R(a,b)$, tak $f \in R(a,b)$ znamená, že f je R-integrovatelná v $\langle a,b \rangle$

a nyní dále – připomenutí toho, co víme o $(R)\int_a^b f(x)dx$:

Něco z toho jsme v MA1 většinou bez důkazů, ale doufám, že cítíte, že vlastnosti R-integrálu jsou dány vlastnostmi limit.

1. existence $(R)\int_a^b f(x)dx$: (v závorce – nenutné číst, pro „zájemce")

(i) podmínka nutná: $f \in R(a,b) \Rightarrow f$ je omezená na $\langle a,b \rangle$.

(když f není omezená, vyrobíme takové součty, které „jdou do ∞" – můžeme volit v dělení hodnoty $f(\xi_i)$ „rychleji" jdoucí do ∞ než délky intervalů D jdou k nule)

(ii) podmínka postačující:

a) f je spojitá v $\langle a,b \rangle \Rightarrow f \in R(a,b)$

(představa – při zjemňování dělení se „asi" děje tohle:

$$\sum_{i}^{n} \min_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f \, \Delta_i x \le \sigma(f,D) = \sum_i f(\xi_i) \Delta_i x \le \sum \max_{x \in \langle x_{i-1}, x \rangle} f \cdot \Delta_i x$$

$$\sigma_{min}(f,D) \le \sigma(f,D) \le \sigma_{max}(f,D)$$

a menší, když $r(D) \to 0$, tak $\sigma_{min}(f,D)$ a $\sigma_{max}(f,D)$ se „k sobě" blíží, tak (věta o policajtech) bude existovat i $\lim_{r(D)\to 0} \sigma(f,D) = \lim_{r(D)\to 0} \sigma_{min}(f,D) = \lim_{r(D)\to 0} \sigma_{max}(f,D)$)

b) f je spojitá v $\langle a,b\rangle \setminus K$, $K \subset \langle a,b\rangle$ konečná množina a f je omezená v $\langle a,b\rangle$ $\Rightarrow$ $f \in R(a,b)$

Poznámka: hodnota $(R)\int_a^b f(x)dx$ nezávisí na hodnotách $f(x)$ v konečně mnoha bodech z $\langle a,b\rangle$

2. Vlastnosti: $f, g \in R(a,b)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, pak:

(i) $\alpha f \in R(a,b)$ a $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

(ii) $f+g \in R(a,b)$ a $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int g(x)dx$

(tj. $\int_a^b f$ je lineární zobrazení z $R(a,b)$ do $\mathbb{R}$)

(iii) aditivita integrálu: je-li $d \in (a,b)$, $f \in R(a,b)$, pak $f \in R(a,d)$ i $f \in R(d,b)$ a $\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$.

(iv) „uspořádání": je-li $f(x) \le g(x)$ v $\langle a,b\rangle$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

(v) věta o střední hodnotě (plyne z iv): je-li f spojitá v $\langle a,b\rangle$, pak existuje bod $c \in \langle a,b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \quad \left(\text{tj. } f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)$$

3. Výpočet:

f je spojitá funkce v $\langle a,b\rangle$, pak má v $\langle a,b\rangle$ primitivní funkci $F(x)$ a platí:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \quad \text{(Newtonův vzorec)}$$

(poznámka: $F(x) = \int_a^x f(\xi)dx$ – o této funkci – „integrálu s proměnnou horní mezí" se dá ukázat, že $F'(x)=f(x)$ v každém bodě $x\in\langle a,b\rangle$, ve kterém je f spojitá – předpokládáme $f\in R(a,b)$).

A jistě bude pro „chápání" vícenásobných integrálů (pro $n=2$, $n=3$) užitečné připomenout větu o substituci, formulovanou pro určitý integrál:

$f\in R(a,b)$; $\varphi\in C^{(1)}(\alpha,\beta)$, $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)=\langle a,b\rangle$, $\varphi'\neq 0$ v $\langle\alpha,\beta\rangle$:

pak $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)).g'(t)\,dt, \text{ je-li } \varphi'(t)>0 \text{ v } \langle\alpha,\beta\rangle$$

(tj. $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$)

(Pro „klesající" substituci $g(t)$ bylo zavedeno: $$\int_c^d f(x)dx = -\int_d^c f(x)dx, \text{ je-li } c>d, \quad \int_a^a f(x)dx = 0)$$

Obecněji pak:

$$\int_\alpha^\beta f(g(t)).g'(t)dt \underset{1VS}{=} \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx, \text{ nebo } \int_a^b f(x)dx \underset{2VS}{=} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt$$

4. Aplikace „další" (mnohé jsou jistě ve fyzice i v chemii)

(i) např. jsme měli objem rotačního tělesa (rotující oblast Ω z úvodu)

$$V(\mathrm{rot}\,\Omega) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

(ii) hmotnost „tyče" v $\langle a,b\rangle$ (spíše struny), přičemž je zanedbatelný vzhledem k délce – je-li dána lineární hustota $\rho(x)$, pak

$$m = \int_a^b \rho(x)\,dx \quad \Big(= \lim_{r(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta_i x$$ – tj. strunu „rozřežeme" na malé kousky „$\Delta_i x$", které považujeme za homogenní, a výsledná hmotnost je součet hmotností „kousků" – a pak „limitíme")

(fyzikálně se integrál chápe i tak, že „dx" je nek. malý kousek struny, $dm = \rho(x)\,dx$ je hmotnost kolem „kousku" a pak „celá" hmotnost je součet, tj. $\int_a^b \rho(x)\,dx$)

(iii) moment setrvačnosti tělo struny (např.) vzhledem k ose, jdoucí $(0,0)$:

$\Delta_i x \longrightarrow \Delta_i m = \rho(\xi_i)\Delta_i x \longrightarrow$ představíme si $\Delta_i m$ „tečka" umístěnou do středu kousku $\Delta_i x$ – dostaneme soustavu (konečnou) hmotných bodů – a moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů je (dle fyziky) součet jejich momentů setrvačnosti – tedy dostáváme pro dělení D:

$$J(D) = \sum_i \xi_i^2 \rho(\xi_i)\Delta_i x \xrightarrow[r(D)\to 0]{} \qquad \xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$$

$$\to \int_a^b x^2 \rho(x)\,dx = J$$

(a snad příklady stačí – fyzika a chemie jistě dají příklady další!)

A nyní zobecnění „těchto myšlenek" pro $n=2$ – <u>dvojný Riemannův integrál</u> – $(R)\iint\limits_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$

1. „Cesta" k definici $\iint\limits_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$ – vezmeme si na začátku jednoduché zobecnění $\int_a^b f(x)\,dx$:

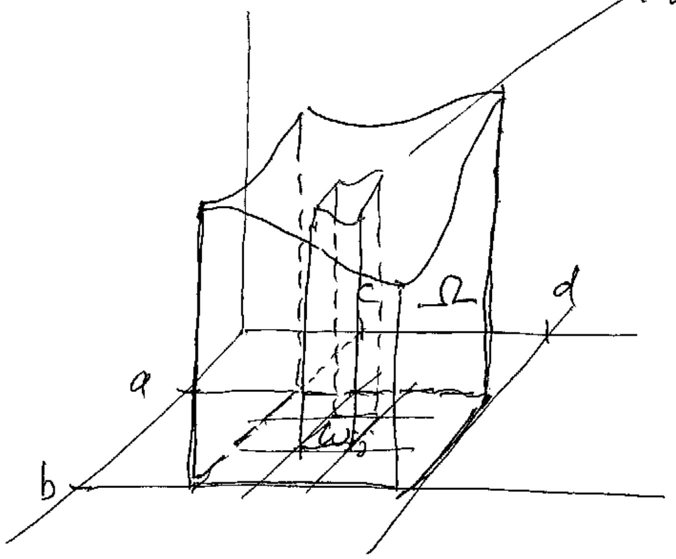
$n=1$		$n=2$
$\omega = \langle a,b\rangle$	$\longrightarrow$	$\omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$
$f(x)$ def. na $\langle a,b\rangle$	$\longrightarrow$	$f(x,y)$ definována na $\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle$
dělení $\langle a,b\rangle$: $D: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$	$\longrightarrow$	dělení $\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle$ $D = D_x \times D_y$, kde $D_x: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ $D_y: c=y_0<y_1<\dots<y_{m-1}<y_m=d$
(interval $\langle a,b\rangle$ jsme rozdělili na intervaly $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ $\langle a,b\rangle = \bigcup\limits_{i=1}^{n}\langle x_{i-1},x_i\rangle$)	$\longrightarrow$	$\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle = \bigcup\limits_{\substack{i=1,\dots n\\ j=1,\dots m}} \langle x_{i-1},x_i\rangle\times\langle y_{j-1},y_j\rangle$ (tj. obdélník ω je sjednocením obdélníčků $\omega_{ij} = \langle x_{i-1},x_i\rangle\times\langle y_{j-1},y_j\rangle$, $i=1,\dots n$; $j=1,\dots m$)

<u>A analogie „významu"</u> $\longrightarrow$ pro $n=2$ – „asi" –

$\int_a^b f(x)\,dx$ pro $f(x)\geq 0$ v $\langle a,b\rangle$ „obsah plochy oblasti $\Omega = \{[x,y];\ x\in\langle a,b\rangle;\ 0\leq y\leq f(x)\}$ (geometrie")

$\iint\limits_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$ bude pro $f(x,y)\geq 0$ v ω objem „tělesa" Ω , kde $\Omega = \{[x,y,z];\ (x,y)\in\omega$ a $0\leq z\leq f(x,y)\}$

<u>Asi takto:</u>



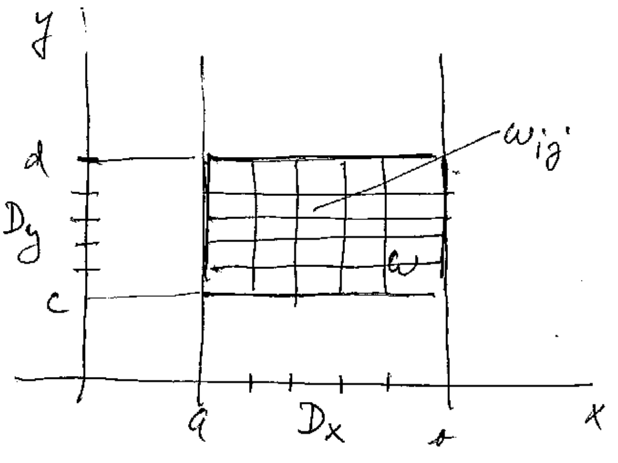
$z = f(x,y)$ – graf fce f, def. v $\omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$

a objem „tělesa" Ω budeme „aproximovat" analogicky jako „u $\int_a^b f(x)dx$" – zvolíme

$(\xi_i, \eta_j) \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle$
$(= \omega_{ij})$

a pak „$\Delta_{ij} V$" $= f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta_i x \cdot \Delta_j y$

$(\Delta_i x = x_i - x_{i-1},\ \Delta_j y = y_j - y_{j-1})$



a V bude pak přibližně

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta_i x\, \Delta_j y$$

$= \sigma(f, D)$ (Riemannův integrální součet, příslušný dělení D)

a budeme opět „limitit" – při „zjemňování dělení"
až (pokud limita bude existovat konečná)

$$V = \lim_{r(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta_i x\, \Delta_j y = \iint_{\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$r(D) = \max_{i,j} (\Delta_i x, \Delta_j y) = \max(r(D_x), r(D_y))$$

(vidíte, že i symbolika zůstala! $\sum \to \int$, $\Delta_i x \to dx$, $\Delta_j y \to dy$

A opět ke symbol pro dvojný integrál z f – více uživatelský –

$V = \iint\limits_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$ – naznačil „jako dvojný součet objemů nekonečně mnoha hranolů o základně $dx.dy$ (obsah „obdélníka o stranách dx a dy") a výšce $z=f(x,y)$ (a „obdélníčky" $dxdy$ „vyplní" celou základnu ω)

A nyní, věřím, už vidíte, že definice, vlastnosti, a asi i existence – budou ´podobné´ definici, vlastnostem a asi i podmínkám existence u $\int_a^b f(x)dx$ – díky vlastnosti „linearity" – jen to bude další „v matematice" dokazovat (my se spokojíme s tím, že chápeme, doufám, že to tak je"). Jediné, co bude asi zcela nové, bude výpočet – primitivní funkce pro funkce dvou proměnných asi nebude !?

Tak obecněji: (a analogicky k opakování $\int_a^b f(x)dx$)

1. Definice:

1) nechť $\omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ $(a<b,\ c<d)$

2) f je definována v ω, tj. f je funkce $f(x,y)$, $\omega \subset Df \subset R^2$

3) označme $D = D_x \times D_y$, $D_x: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$,
$D_y: c=y_0<y_1<\dots<y_m=d$,

$\nu(D)=\max(\nu(D_x), \nu(D_y))$, $\omega_{ij} = \langle x_{i-1},x_i\rangle \times \langle y_{j-1},y_j\rangle$,

a $(\xi_i, \eta_j) \in \omega_{ij}$,

a Riemannův integrální součet $\sigma(f,D) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta_i x\, \Delta_j y$

$(\Delta_i x = x_i - x_{i-1},\ \Delta_j y = y_j - y_{j-1})$

Pak, pokud existuje vlastní (tj. konečná) limita

$$\lim_{r(D)\to 0} \sigma(f, D) \in \mathbb{R}, \text{ nezávislé na volbě bodů } (\xi_i, \eta_j) \in \omega_{ij},$$

pak tuto limitu nazýváme <u>Riemannovým dvojným integrálem</u>

a značíme

$$\lim_{r(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta_i x\, \Delta_j y = (R)\iint_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$$

Je-li dána $\omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$, pak množinu funkcí, které mají R-integrál $\iint_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$, budeme značit <u>$R(\omega)$, a psát $f \in R(\omega)$.</u>

(Také se říká „často", že f je Riemannovsky integrovatelná v oblasti ω)

<u>1. Existence</u> $\omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$

(i) <u>podmínka nutná</u>: $f \in R(\omega) \Rightarrow f$ je omezená na ω

(ii) <u>podmínka postačující</u>: $f \in C(\omega) \Rightarrow f \in R(\omega)$

($f \in C(\omega)$ znamená f je spojitá na $\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$)

nebo: $f \in C(\omega \setminus K)$, kde K je množina, která obsahuje konečně mnoho bodů nebo „jednoduchých oblouků" (bude přesně definováno – představte si třeba části grafu fce jedné proměnné konečné délky), a f je omezená na ω !

A trochu vysvětlení – u spojité funkce v $\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ –
– při dělení je R-součet mezi maximálním a minimálním schodištěm – a u spojité funkce jdou schodiště k sobě při zjemňování dělení

a nespojitost v konečně mnoha bodech a obloucích – při omezenosti funkce „vrchlíky" na střeše tělesa, které jsme si představili „jako návod pro pochopení dvojného integrálu, asi nevadí při počítání objemu.

3. Vlastnosti – „podobné" $n=1$:

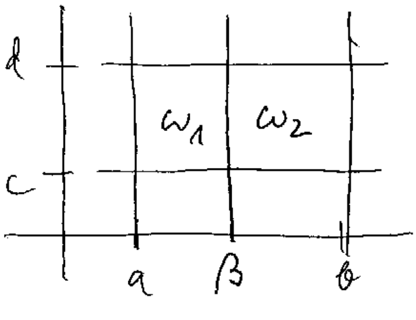
a) linearita: $f,g \in R(\omega)$, $\alpha \in R$, pak

$$\alpha f \in R(\omega) \text{ a } \iint_\omega \alpha f(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_\omega f(x,y)\,dx\,dy$$

$$f+g \in R(\omega) \text{ a } \iint_\omega (f(x,y)+g(x,y))\,dx\,dy = \iint_\omega f(x,y)\,dx\,dy + \iint_\omega g(x,y)\,dx\,dy$$

b) aditivita $f \in R(\omega) \Rightarrow f \in R(\omega_1)$ i $f \in R(\omega_2)$ a

$$\iint_\omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\omega_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\omega_2} f(x,y)\,dx\,dy$$



$\omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle = \omega_1 \cup \omega_2$,
$\omega_1 = \langle a,\beta\rangle \times \langle c,d\rangle$
$\omega_2 = \langle \beta,b\rangle \times \langle c,d\rangle$

(analogicky, když „rozdělíme" interval $\langle c,d\rangle = \langle c,\gamma\rangle \cup \langle \gamma,d\rangle$)

c) „uspořádání": $f, g \in R(\omega)$, $f(x) \leqq g(x)$ v $\omega \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_\omega f(x,y)\,dx\,dy \leqq \iint_\omega g(x,y)\,dx\,dy$$

a odtud opět plyne věta o střední hodnotě integrálního počtu:

f je spojitá v $\omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ (pak je $f \in R(\omega)$), pak existuje bod $(\xi, \eta) \in \omega$ tak, že

$$\iint_\omega f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\cdot(b-a)\cdot(d-a)\ ,\ tj.$$

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \iint_\omega f(x,y)\,dx\,dy$$

(tj. $f(\xi,\eta)$ je jakási průměrná výška v budově, kterou jsme uvažovali na začátku „pořádku" o doporučené integraci – proto se mluví o střední hodnotě dané veličiny f v ω)

4. Další aplikace budeme mít v příkladech", ale třeba si teď můžete také představit, že

$$m = \iint_\omega \rho(x,y)\,dx\,dy$$ je hmotnost „membrány" (tloušťka desky je zanedbatelná!) s hustotou $\rho(x,y)$

($dm = \rho(x,y)\,dx\,dy$ – element hmotnosti, dm, jak se často píše ve fyzice (spíš obvykle)

a celková hmotnost je opět „součet" hmotností „kousků" ω

Jistě formulka k aplikacím – z definice R-integrálů $\int_a^b f(x)dx$ i $\iint_\omega f(x,y)dxdy$ je „vidět", že pomocí integrálu se dají vyjádřit hodnoty takových veličin, které lze „rozdělit" (dělení atd), „vymodelovat" po těch kouscích a pak ty části sečíst – takové veličiny se nazývají <u>aditivní</u> –

například: plochy, objemy, hmotnosti, moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů (viz naše příklady užití)

<u>A nyní vysvětlit</u> $\iint_\omega f(x,y)dxdy$ (*) :

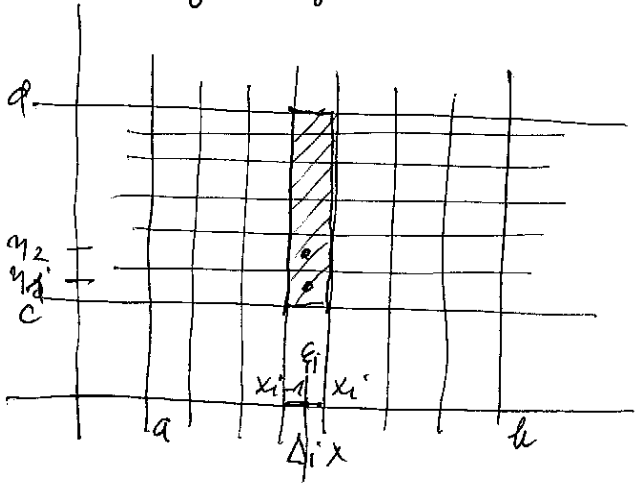
Protože věta, která nám bude říkat, jak máme integrovat v případě integrálu (*), bude opět bez důkazu, tak se pokusme návodu k pravidlům „aspoň trošku porozumět":

Nejsnáze jednodušší to bude (aspoň pro načrtnutí) v případě hmotnosti membrány $\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$, nehomogenní s hustotou $\rho(x,y)$, $(x,y) \in \omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$!

$$m = \iint_\omega \rho(x,y)\,dxdy = \lim_{\nu(D)\to 0} \sum_i \sum_j \rho(\xi_i,\eta_j)\,\Delta_i x\,\Delta_j y \; –$$

– tj. hmotnost získáme tak, že vytvoříme $\sigma(\rho;D)$ – sčítáme bez „řádu a pravidel" – všechny „kousky" naházíme do $\sigma(\rho,D)$ v libovolném pořadí – zkusme udělat „pořádek" (zkusme):

(Píšu zde obecně $f(x,y)$ místo hustoty $\varrho(x,y)$ – omlouvám se)



1) sečteme pro „pevně vybrané" $\Delta_i x$ tj., co je určeno intervalem $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$; zvolme $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ pro ni $j = 1, \dots m$

tj. $\left(\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta_j y\right)\Delta x_i$ –

– máme pro každý interval dělení D_x $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ hmotnost „proužku" o základně $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ –

– a pak už stačí jen sečíst tyto částečné součty; tedy:

Protože limita nezávisí na volbě (ξ_i, η_j), volíme $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a $\eta_j \in \langle y_{j-1}, y_j\rangle$, pak $(\xi_i, \eta_j) \in \omega_{ij}$

$$\sigma(f,D) = \sum_i \sum_j f(\xi_i, \eta_j)\Delta_i x\, \Delta_j y = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta_j y\right)\Delta_i x$$

a teď, když si představíme limitu $\lim\limits_{r(D)\to 0} \sigma(f,D)$, je také $r(D_x)\to 0$ a $r_1(D_y)\to 0$, a tedy (není to důkaz!, jen „naznačení") „zřejmě"

$$\lim_{r(D_y)\to 0} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta_j y = \int_c^d f(\xi_i, y)\,dy$$

a pak pro $r(D_x)\to 0$ dostaneme:

$$\lim_{r(D)\to 0} r(D) = \int_a^b \Big(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{\text{funkce proměnné } x \in \langle a,b\rangle}\Big)dx$$

Stejně tak můžeme obrátit pořadí sčítání (a „vzorky" prohodit):

$$\sigma(f,D) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\Delta_i x}_{} \Big) \Delta_j y$$

pro $\nu(D_x) \to 0$ $\longrightarrow \int_a^b f(x,y)\,dx$ – fce proměnné y

pro $\nu(D_y) \to 0$ $\longrightarrow \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big)\,dy$

a můžeme formulovat „slavnou" Fubiniho (Fubiniovu) větu:

Věta (Fubini):

Nechť $f \in C(\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle)$; pak $(f \in R(\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle))$

$$\iint_{\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big)\,dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big)\,dy .$$

a poznámky (před příklady):

1) je vidět, že dvojný integrál počítáme tak, že převedeme výpočet na dva integrály (R) jednorozměrné – a tak to bude i jinde (pak už jen numerický výpočet)

2) funkce $\int_c^d f(x,y)\,dy$ proměnné x je integrovatelná v $\langle a,b\rangle$ za předpokladu věty, stejně tak i funkce proměnné y $\int_a^b f(x,y)\,dx$ je integrovatelná v $\langle c,d\rangle$

3) Fubiniho věta může být formulována i se slabšími předpoklady, než je spojitost f v ω (stačí $f \in R(\omega)$) – – můžete se podívat do literatury, koho to zajímá! – – nám stačí věta takto formulovaná!)

A příklady:

1) $$\iint\limits_{\langle -1,1\rangle \times \langle -2,2\rangle} (x^2+y^2)\,dx\,dy \underset{F.V.}{=} \int_{-1}^{1} \left(\int_{-2}^{2} (x^2+y^2)\,dy \right) dx =$$

(x^2 – konstanta vzhledem k y – jako parciální integrace!)

(integrál existuje – f je spojitá v oboru integrace)

$$= \int_{-1}^{1} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^{2} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(4x^2 + \frac{16}{3} \right) dx = 4 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}x \right]_{-1}^{1} = \frac{40}{3}$$

a v obráceném pořadí (musí „vyjít" stejný výsledek :):

$$\iint\limits_{\langle -1,1\rangle \times \langle -2,2\rangle} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} \left(\int_{-1}^{1} (x^2+y^2)\,dx \right) dy = \int_{-2}^{2} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{-1}^{1} dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy = \left[\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} y^3 \right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3}$$

A co by tento integrál mohl „modelovat"?

1) objem podstavy o obdélníkové základně „pod" rotačním paraboloidem
2) moment setrvačnosti obdélníkové desky o hustotě $\rho(x,y) \equiv 1$ vzhledem k počátku (tj. středu desky)

3) jistě hmotnost desky, je-li hustota $\rho(x,y) = x^2+y^2$.

a jeden „humorný" příklad na závěr: $(f \in C(\langle a,b\rangle),\ g \in C(\langle c,d\rangle))$

$$\iint_{\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle} f(x).g(y)\,dx\,dy \underset{F.V.}{=} \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)\,dy \right) dx =$$

f(x) je ale konstanta ve vnitřním integrálu

$$= \int_a^b f(x)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right) dx \overset{*}{=}$$

a teď je $\int_c^d g(y)dy$ konstanta v int. $\int_a^b (\dots)dx$, tedy je „můžeme vytknout z integrálu":

$$\overset{*}{=} \int_c^d g(y)\,dy \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

! a vida –

– zde „integrál ze součinu" je „součin integrálů"!

(což bylo „dříve" zakázáno!)

Příště předvedu „sofistikované" integrační obory u $\iint_\omega f(x,y)\,dx\,dy$, a ukážeme větu o substituci ve dvojném integrálu (užitečné!) a nejspíš i už budeme schopni „začít" integrál trojný, tj. z fcí $f(x,y,z)$ přes $\Omega \subset R^3$ – už tomu budeme „rozumět", tak to půjde „rychleji" – a bude dost příkladů.